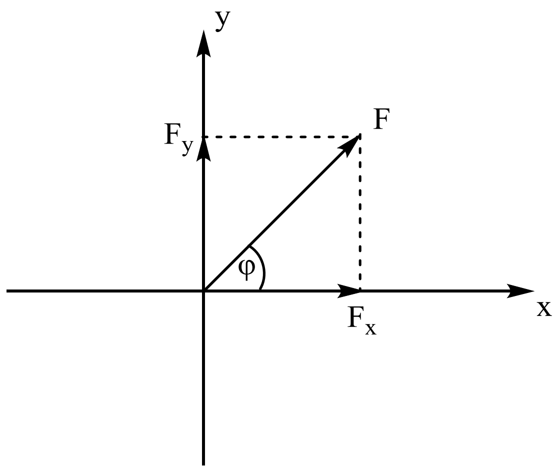
**Προβλήματα Ισορροπίας Δυνάμεων**

**Μεθοδολογία ασκήσεων**

Όταν έχουμε προβλήματα στο οποία ένα σώμα ισορροπεί, η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε έχει ως εξής:

1. **Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.**
   Το πλήθος των δυνάμεων που σχεδιάζουμε εξαρτάται από τα σώματα με τα οποία έρχεται σε επαφή το σώμα συν τις δυνάμεις από απόσταση (όταν έχουμε προβλήματα μηχανικής, συνήθως η μόνη δύναμη από απόσταση είναι το βάρος).
2. **Επιλέγουμε κατάλληλο σύστημα αξόνων $x$ και $y$.**
   Η επιλογή των αξόνων γίνεται με στόχο να είναι επάνω σε αυτούς τους άξονες όσο το δυνατόν περισσότερες δυνάμεις, έτσι ώστε να χρειαστεί να αναλύσουμε λιγότερες δυνάμεις σε συνιστώσες.
3. **Αναλύουμε όσες δυνάμεις δεν βρίσκονται επάνω στους άξονες που επιλέξαμε σε δύο συνιστώσες.**
5. **Εκφράζουμε κάθε συνιστώσα δύναμης με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών.**
   Από το σχήμα που έχουμε, προσπαθούμε να εντοπίσουμε γωνίες που γνωρίζουμε έτσι ώστε να εκφράσουμε κάθε συνιστώσα σε συνάρτηση με τριγωνομετρικό αριθμό αυτής της γωνίας.
   Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι αναλύουμε τη δύναμη $F$ σε δύο συνιστώσες, την $F_x$ και την $F_y$ και έστω ότι γνωρίζουμε τη γωνία $\varphi$. Η συνιστώσα $F_x$ είναι *προσκείμενη* της γωνίας $\varphi$ επομένως θα ισούται με $F \cdot \text{συν}\varphi$ ενώ η $F_y$ θα ισούται με $F \cdot \text{ημ}\varphi$.




4. **Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Newton σε κάθε άξονα.**
   Η συνθήκη ισορροπίας εκφράζεται ως εξής: $\Sigma\vec{F} = 0 \begin{cases} \Sigma\vec{F}_x = 0 \\ \Sigma\vec{F}_y = 0 \end{cases}$
5. **Τέλος συνδυάζουμε τις σχέσεις που έχουμε ώστε να υπολογίσουμε τα ζητούμενα μεγέθη.**
6. **Αν πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή κάποιας γωνίας, θα πρέπει να βρούμε έναν τριγωνομετρικό αριθμό αυτής της γωνίας, δηλαδή το ημίτονο, το συνημίτονο ή την εφαπτομένη της γωνίας.**

**Τριγωνομετρικοί αριθμοί**

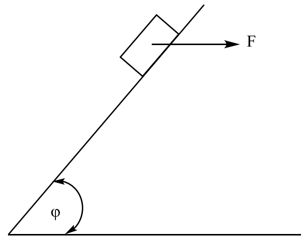
| Γωνία ($^\circ$) | Γωνία (ακτίνια) | Ημίτονο | Συνημίτονο | Εφαπτομένη |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | Δεν ορίζεται |

**Τριγωνομετρικές σχέσεις**

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} \qquad \text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$$

## Προβλήματα Ισορροπίας Δυνάμεων

**1.** Σώμα Σ, μάζας $1\ \text{kg}$ ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία $\varphi$ με το οριζόντιο επίπεδο, με τη βοήθεια της οριζόντιας δύναμης $F = 10\ \text{N},$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογιστεί η γωνία $\varphi$ και η δύναμη που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο σώμα.




### 1ος Τρόπος

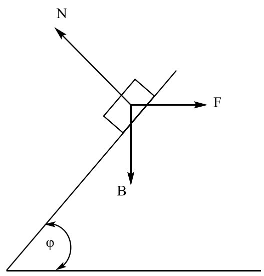
Εφόσον το σώμα ισορροπεί, θα ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton, δηλ. $\Sigma\vec{F} = 0.$ Επομένως η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα θα είναι η εξής:

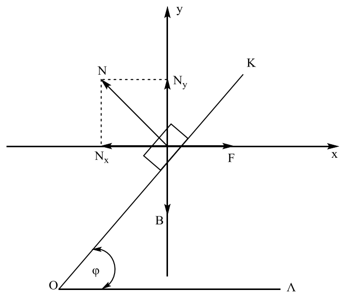
**α.** Θα σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα θα είναι από απόσταση και λόγω επαφής. Το σώμα έρχεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο, επομένως θα ασκείται η «κάθετη αντίδραση του δαπέδου». Ασκείται η δύναμη $F$ και τέλος ασκείται το βάρος, $B.$

**β.** Αναλύουμε τις δυνάμεις σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες, τον άξονα $x$ και τον άξονα $y.$ Η επιλογή των αξόνων **δεν έχει σημασία.** Όποιους άξονες και να επιλέξουμε, θα καταλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα. Ένα κριτήριο που χρησιμοποιούμε για τη χάραξη των αξόνων είναι το εξής: προσπαθούμε να αναλύσουμε όσο το δυνατόν λιγότερες δυνάμεις, έτσι ώστε οι υπολογισμοί που θα κάνουμε να είναι οι λιγότεροι δυνατοί.

**γ.** Εφόσον το σώμα ισορροπεί, θα ισορροπεί και ως προς τους άξονες στους οποίους έχουμε αναλύσει τις δυνάμεις. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με τις σχέσεις: $\Sigma\vec{F}_x = 0$ και $\Sigma\vec{F}_y = 0.$

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, οπότε έχουμε το ακόλουθο σχήμα.




Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, οι διευθύνσεις των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως, συμφέρει να πάρουμε ως άξονα $x$ τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ και ως άξονα $y$ τη διεύθυνση του βάρους $\vec{B}.$ Έτσι, θα χρειαστεί να αναλύσουμε σε συνιστώσες μόνο την κάθετη αντίδραση του δαπέδου. Θα έχουμε λοιπόν την εικόνα του διπλανού σχήματος, ενώ οι σχέσεις ισορροπίας που θα ισχύουν θα είναι:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F - N_x = 0 \Rightarrow F = N_x \quad (1)$$

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_y - B = 0 \Rightarrow N_y = B \quad (2)$$

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δυνάμεων $N_y$ και $N$ έχει πλευρές καθέτους με τη γωνία $\varphi.$ Άρα είναι ίσες και έτσι θα ισχύει ότι $N_y = N\text{συν}\varphi$ και $N_x = N\text{ημ}\varphi.$

Επομένως οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται:

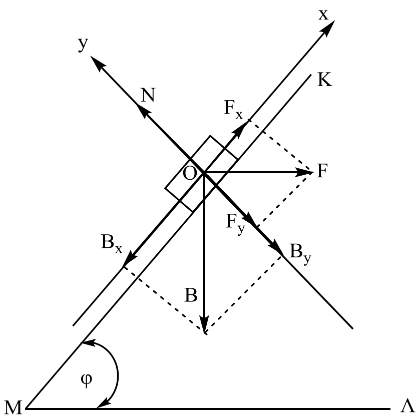
$N_x = F \Rightarrow N\text{ημ}\varphi = F$ και $N_y = B \Rightarrow N\text{συν}\varphi = mg.$ Αν τις διαιρέσουμε κατά μέλη θα έχουμε ότι:

$$\frac{N\text{ημ}\varphi}{N\text{συ}\varphi} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \frac{\text{ημ}\varphi}{\text{συ}\varphi} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \text{εφ}\varphi = \frac{10}{1\cdot 10} \Rightarrow \text{εφ}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Τέλος, για την κάθετη αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου θα χρησιμοποιήσουμε μία από τις δύο ισότητες, δηλ. $N\text{ημ}\varphi = F \Rightarrow N = \dfrac{F}{\text{ημ}\varphi} = \dfrac{10}{\text{ημ}45} = \dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2\cdot 10}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}\cdot 10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{2} \Rightarrow N = 10\sqrt{2}\ \text{N}.$

**Προβλήματα Ισορροπίας Δυνάμεων**

**2ος Τρόπος**

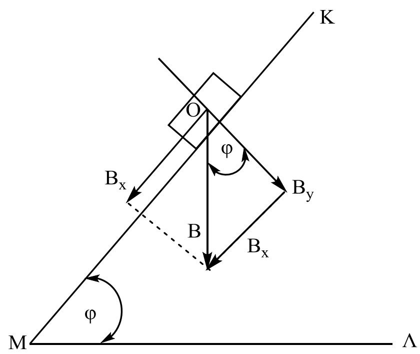



Σε αυτήν την προσέγγιση έχουμε επιλέξει ως άξονα $x$ τον άξονα που είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο, και ως άξονα $y$ τον άξονα που είναι κάθετος στον $x$, δηλαδή την ευθεία στην οποία βρίσκεται η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$. Εκφράζουμε την κατάσταση ισορροπίας στους δύο άξονες $x$ και $y$.

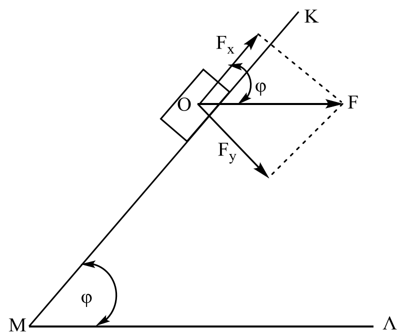
$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_x - B_x = 0 \Rightarrow F_x = B_x$ (1) και

$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N - F_y - B_y = 0 \Rightarrow N = F_y + B_y$ (2)

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $B$ και $B_y$ έχει πλευρές καθέτους με τη γωνία $\varphi$. (Η $B$ είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο ΜΛ και η $B_y$ είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο ΜΚ – η ισότητα των γωνιών φαίνεται στο διπλανό σχήμα, πόυ αποτελεί τμήμα της προηγούμενης εικόνας). Επομένως: $B_x = B\eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi$ (αφού η $B_x$ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\varphi$).




Επίσης στο σχήμα μπορούμε να δούμε ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $F$ και $F_x$ είναι ίση με τη γωνία $\varphi$. (Η $F$ είναι παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο ΜΛ και η $F_x$ είναι παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο ΜΚ – η ισότητα των γωνιών φαίνεται στο διπλανό σχήμα, πόυ αποτελεί τμήμα της προηγούμενης εικόνας). Επομένως: $F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi$ (αφού η $F_x$ είναι προσκείμενη της γωνίας $\varphi$).




Με τις προηγούμενες παρατηρήσεις η σχέση (1) γράφεται:

$$F_x = B_x \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi = mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{F}{mg} = \frac{10}{1\cdot 10} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Για τον υπολογισμό της δύναμης $N$ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2) η οποία γίνεται:

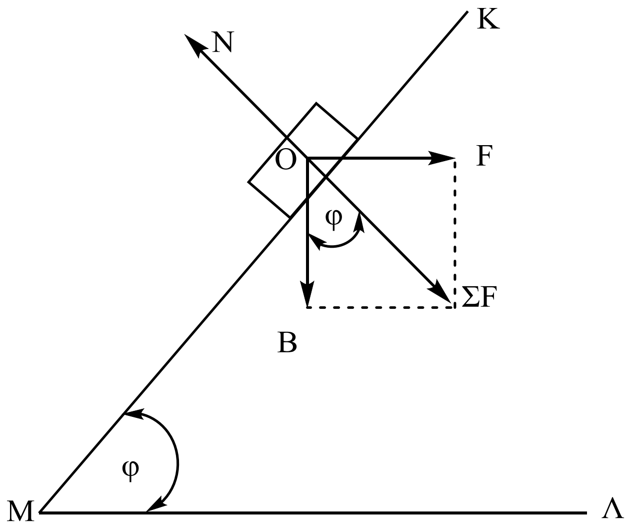
$$N = F_y + B_y \Rightarrow N = F\eta\mu\varphi + B\sigma\upsilon\nu\varphi = F\eta\mu\varphi + mg\sigma\upsilon\nu\varphi = F\eta\mu 45^0 + mg\sigma\upsilon\nu 45^0 \Rightarrow$$

$$N = 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow N = 10\sqrt{2}\ \text{N}.$$

**Προβλήματα Ισορροπίας Δυνάμεων**

**3$^{ος}$ Τρόπος**

Οι δύο προηγούμενοι τρόποι επίλυσης του προβλήματος βασίστηκαν στην ανάλυση δυνάμεων σε άξονες και στην εφαρμογή του 1$^{ου}$ Νόμου του Newton στους δύο νέους άξονες $x$ και $y$. Οι δύο αυτοί τρόποι είναι ισοδύναμοι, αν και δεν απαιτούν την ίδια εργασία (καθώς στη δεύτερη περίπτωση χρειάσθηκε να αναζητήσουμε δύο γωνίες για την ανάλυση των δυνάμεων). Ο τρίτος τρόπος που παρουσιάζουμε τώρα, βασίζεται στην παρατήρηση ότι δύο από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σχηματίζουν ορθή γωνία. Επειδή το σώμα ισορροπεί, και φυσικά ισχύει ο 1$^{ος}$ Νόμος του Newton, μπορούμε να δούμε ότι η κάθετη αντίδραση του δαπέδου θα πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των άλλων δύο δυνάμεων.




Επομένως, βρίσκουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{F}$ με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$\Sigma F = \sqrt{B^2 + F^2} = \sqrt{(mg)^2 + F^2} = \sqrt{(1\cdot 10)^2 + 10^2} = \sqrt{2\cdot 10^2} \Rightarrow \Sigma F = 10\sqrt{2}\ \mathrm{N}$$

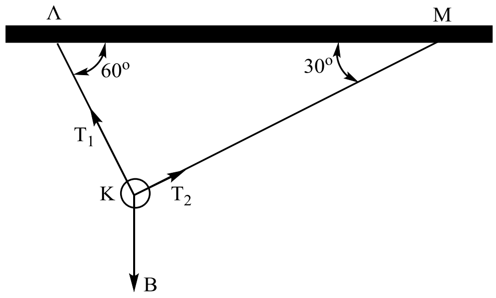
Επομένως η κάθετη αντίδραση του κεκλιμένου δαπέδου θα είναι $10\sqrt{2}$ N.

Όσον αφορά τη γωνία $\varphi$ από το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι η γωνία που σχηματίζουν η $\Sigma F$ και η $B$ είναι ίση με $\varphi$ (διότι το βάρος $B$ είναι είναι κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο, πλευρά ΜΛ της γωνίας $\varphi$ και η $\Sigma F$ αφού είναι συγγραμική της $N$ θα είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, πλευρά ΜΚ της γωνίας $\varphi$).

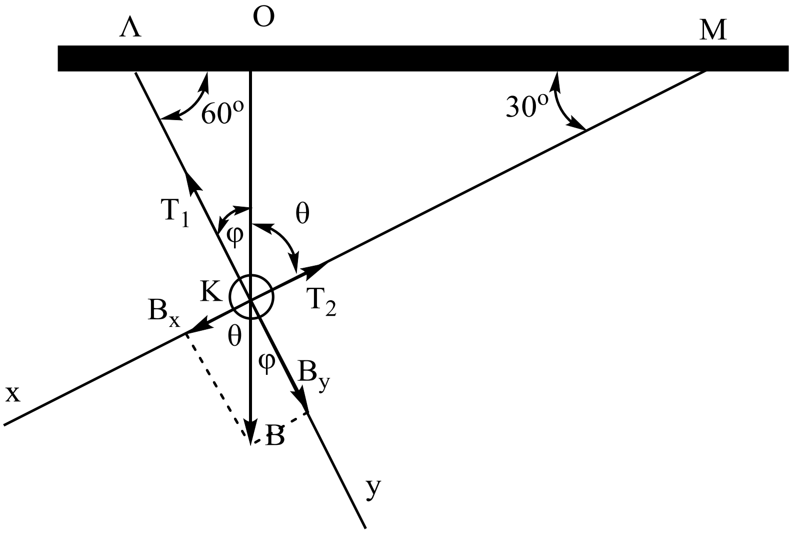
Υπολογίζουμε λοιπόν έναν από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\text{συν}\varphi = \frac{B}{\Sigma F} = \frac{mg}{\Sigma F} = \frac{1\cdot 10}{10\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

**2.** Από την οροφή ενός δωματίου κρεμάμε με δύο αβαρή νήματα ένα σώμα βάρους $10\ \mathrm{N}$. Η γωνία που σχηματίζουν τα νήματα με την οροφή είναι $60^0$ και $30^0$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογισθούν οι τάσεις των δύο νημάτων.




Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, το τρίγωνο που σχηματίζουν τα δύο νήματα είναι ορθογώνιο. Έτσι θεωρούμε ως άξονα $x$ τη διεύθυνση της δύναμης $T_2$ και ως άξονα $y$ τη διεύθυνση της δύναμης $T_1$. Η εικόνα που θα έχουμε φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



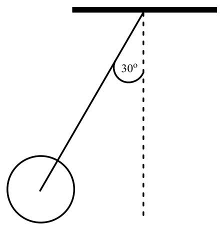

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε αναλύσει το βάρος στις δύο συνιστώσες και έχουμε προεκτείνει την ευθεία που διέρχεται από το βάρος, η οποία τέμνει την οροφή στο σημείο Ο. Η προέκταση αυτή σχηματίζει το τρίγωνο ΟΚΛ, το οποίο είναι ορθογώνιο (το βάρος είναι κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο, άρα θα είναι κάθετο και στην οροφή). Στο τρίγωνο αυτό η γωνία $\varphi$ θα ισούται με $30^0$. Η γωνία αυτή θα ισούται και με τη γωνία που σχηματίζουν οι δυνάμεις $B$ και $B_x$ ως κατά κορυφή. Έτσι στον άξονα $y$ θα ισχύει ότι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 - B_y = 0 \Rightarrow T_1 = B_y = B\text{συν}\varphi = 10\cdot\text{συν}30^0 = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_1 = 5\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$

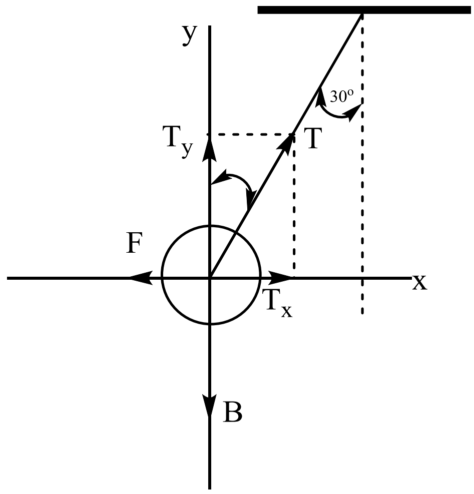
Παρομοίως, το τρίγωνο ΟΚΜ είναι ορθογώνιο και η γωνία $\theta$ ισούται με $60^0$. Η γωνία αυτή θα είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι δυνάμεις $B$ και $B_x$ ως κατά κορυφή. Επομένως στον άξονα $x$ θα ισχύει ότι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 - B_x = 0 \Rightarrow T_2 = B_x = B\text{συν}\theta = B\text{συν}60^0 \Rightarrow T_2 = 10\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow T_2 = 5\ \mathrm{N}$$

**3.** Στο διπλανό σχήμα το σώμα βάρους $30\ \mathrm{N}$ ισορροπεί με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ σε θέση έτσι ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία $30^0$ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ και της τάσης του νήματος στη θέση αυτή.




Στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος $\vec{B}$, η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Επειδή το βάρος και η οριζόντια δύναμη είναι κάθετες μεταξύ τους, σχηματίζουμε τους άξονες $x$ και $y$ με τις διευθύνσεις τους, οπότε αναλύουμε μόνο την τάση του νήματος στις συνιστώσες $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των δυνάμεων $\vec{T}$ και $\vec{T}_y$ είναι ίση με $30^0$ ως εντός εναλλάξ. Επομένως η ισορροπία του σώματος στους δύο άξονες, εκφράζεται με τις ακόλουθες σχέσεις:




Στον άξονα $x$

$$\Sigma F_x = T_x - F \Rightarrow T_x = F \Rightarrow T\eta\mu 30^0 = F$$

και στον άξονα $y$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T_y - B = 0 \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu 30^0 - B = 0 \Rightarrow T = \frac{B}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\cdot 30}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} \Rightarrow T = 20\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της δύναμης $\vec{T}$ στη σχέση ισορροπίας στον άξονα $x$ για να υπολογίσουμε τη δύναμη $\vec{F}$

$$T\eta\mu 30^0 = F \Rightarrow 20\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = F \Rightarrow F = 10\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$